

MATEMATICĂ

TEME RECAPITULATIVE

CLASA A VI-A

ALGEBRĂ	5
CAPITOLUL I. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE	7
CAPITOLUL II. DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE	12
II.1. Cel mai mare divizor comun. Cel mai mic multiplu comun	12
CAPITOLUL III. RAPOARTE ȘI PROPORȚII	18
III.1. Rapoarte și proporții. Șir de rapoarte egale. Mărimi direct proporționale. Mărimi invers proporționale. Regula de trei simplă	18
CAPITOLUL IV. MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI	28
CAPITOLUL V. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE	36
GEOMETRIE	47
CAPITOLUL I. NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE	49
I.1. Unghiuri opuse la vârf. Unghiuri în jurul unui punct. Unghiuri suplimentare. Unghiuri complementare. Bisectoarea unui unghi	49
I.2. Drepte paralele. Axioma paralelelor. Criterii de paralelism	52
I.3. Drepte perpendiculare în plan. Distanța de la un punct la o dreaptă	54
I.4. Cerc. Unghi la centru	57
CAPITOLUL II. TRIUNGHIUL	60
II.1. Triunghiul. Linii importante în triunghi. Metoda triunghiurilor congruente. Proprietăți ale triunghiului isoscel, ale triunghiului echilateral, ale triunghiului dreptunghic	60
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	65
NOTIȚELE ELEVULUI	81

1. Se consideră mulțimea $A = \{24, 36, 45, 56, 65, 100, 123, 125, 210, 245, 300, 330\}$.
 - a) Determinați mulțimile $B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \div 3\}$, $C = \{x \mid x \in A \text{ și } x \div 2\}$ și $D = \{x \mid x \in A \text{ și } x \div 5\}$.
 - b) Determinați mulțimile $B \cap C$, $C \cap D$ și $B \cap C \cap D$.
2. Se consideră mulțimile $A = \{0, 1, 2, 3\}$ și $B = \{x \mid x = 1^n + n, \text{ unde } n \in A\}$.
 - a) Determinați elementele mulțimii B .
 - b) Determinați card B .
3. Fie mulțimile $A = \{0, 1, 2, 3\}$ și $B = \{x \mid x = 2a + 1, \text{ unde } a \in A\}$.
 - a) Determinați elementele mulțimii B .
 - b) Calculați $A \cap B$ și $A \cup B$.
4. Fie $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ și $B = \{x \mid x = 2^a - a, \text{ unde } a \in A\}$. Scrieți elementele mulțimii B și calculați card B .
5. Determinați elementele mulțimilor:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 3 \text{ sau } 2^x = 16\};$	b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^x = 1 \text{ sau } 2^x = 32\};$
c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2^n, n \in \mathbb{N}^*, n \leq 5\};$	d) $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 \leq 27 \text{ și } x^2 \geq 4\};$
e) $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este ultima cifră a lui } n^2, \text{ cu } n \in \mathbb{N}\}.$	
6. Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 6\}$ și $B = \{y \mid y = x + 1, x \in A\}$. Determinați mulțimile A , B , $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ și $B - A$.
7. Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$ și $B = \{y \mid y = x + 2, x \in A\}$. Determinați mulțimile A , B , $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ și $B - A$.
8. Fie mulțimile $A = \{1, 3, 5\}$ și $B = \{2, 3, 4\}$. Determinați elementele mulțimii $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x = a + b, \text{ unde } a \in A \text{ și } b \in B\}$ și card C .
9. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2k + 1, k \in \mathbb{N}^*, k \leq 4\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2^k + 1, k \in \mathbb{N}, k < 4\}$. Determinați elementele mulțimilor A , B , $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ și $B - A$.
10. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 1 \in \mathcal{D}_{18}\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathcal{D}_{12}\}$. Determinați elementele mulțimilor A , B , $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ și $B - A$.
11. Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 6\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < 9\}$. Determinați mulțimile A , B , $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$, $(A \cup B) - \{3, 5, 7, 9, 11\}$.
12. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 5\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x < 10\}$. Determinați mulțimile A , B , $A \cup B$, $A - B$, $B - A$, $(A \cap B) - \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

- 13.** Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 4 \leq 2x \leq 14\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq 2x + 1 \leq 11\}$. Determinați mulțimile A , B , $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ și $B - A$. Arătați că $\text{card}(A \cup B) - \text{card}(A \cap B) = \text{card}(A - B) + \text{card}(B - A)$.
- 14.** Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x - 2 < 3\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 7 \leq 2x + 3 \leq 15\}$. Determinați mulțimile A , B . Arătați că $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$.
- 15.** Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 19 \leq 6x - 5 < 85\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 21 < 2x - 1 \leq 33\}$. Determinați mulțimile A , B , $A \cap B$, $A \cup B$, $B - A$ și $A - B$.
- 16.** Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq 2x - 5 < 7\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 3x - 8 < 7\}$.
- Determinați mulțimile A și B .
 - Calculați $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ și $B - A$.
- 17.** Se dau mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 1 \leq 6\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x < 7\}$. Determinați elementele mulțimilor A , B , $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ și $B - A$.
- 18.** Se dau mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 2^x - 132 < 124 - 2^x\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x - 1 \in \mathcal{D}_{15}\}$.
- Determinați elementele mulțimilor A și B .
 - Calculați $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ și $B - A$.
- 19.** Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3^{7x+5} < [(3^2)^4]^5\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq 2x - 3 \leq 9\}$.
- Determinați elementele mulțimilor A și B .
 - Calculați $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ și $B - A$.
- 20.** Se consideră mulțimile $A = \{a, b, c, d\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 20\}$, unde $a = 2^4 \cdot (2^5)^2 : (2^3)^3 - 3^7 : (3^2)^2$, $b = \{1 + [2 + 3 \cdot (4^2 - 5)] : 5\} : 2$, $c = 2^2 \cdot [3^2 + 4^2 \cdot (5^2 - 2^3 \cdot 3)] : 5$, $d = (3^2)^4 : 3^5 + (2^3)^2 : 2^2 - 7 \cdot (5^2)^3 : 5^5$. Calculați $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ și $B - A$.
- 21.** Se dau mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x + 3 < 9\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x + 2 < 11\}$ și $C = \{a, b, c\}$, unde $a = 72 : \{2^5 - 2 \cdot [5^2 - (3^8 \cdot 5^3) : (3^7 \cdot 5^2)]\}$, $b = (7^7 : 7^4 \cdot 7^2)^2 : 7^{3^2}$, $c = [3^{14} : (3^3)^4 - (5^7)^5 : (5^2)^{17}] : 2$. Calculați $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.
- 22.** Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 7\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x - 1 < 8\}$ și $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 6 < x + 1 \leq 12\}$. Determinați mulțimile A , B , C , $A \cup B$, $B \cup C$, $(A \cap B) \cup C$, $(A \cap C) \cup B$, $(A \cap B) \cup (B \cap C)$.
- 23.** Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 9 < 2(2x - 3) + 7 \leq 29\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 1 \leq 2(3x + 4) - 7 < 37\}$.
- Determinați elementele mulțimilor A și B .
 - Aflați mulțimile $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ și $B - A$.
- 24.** Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < 2[2(4x - 3) + 13] - 27 < 115\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 13 < 2[(3(2x - 3) + 17) - 27 < 97\}$.
- Determinați mulțimile A și B .
 - Calculați $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ și $B - A$.

- 25.** Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 21 < 5(3x - 3) + 4 + 3(2x - 4) + 2 \leq 168\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 11 < 3(2x - 3) + 8 + 3(x - 3) - 6 < 65\}$. Determinați mulțimile $A, B, A \cap B, A \cup B, A - B$ și $B - A$.
- 26.** Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x < 8\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 6\}$ și $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2a - 1, a \in B\}$. Determinați mulțimile $A, B, C, (A \cup B) \cap C, (A - C) \cup B, (B - C) \cup A, (C - A) \cap B, (A \cap B) \cup (B - C), A \cup B \cup C, A \cap B \cap C$.
- 27.** Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2a - 1, a \in A\}$ și $C = \{y \in \mathbb{N} \mid y = 2x + 1, x \in B\}$. Determinați mulțimile $A, B, C, (A \cap B) \cup (B \cap C), (A - B) \cup (B - C), (A - B) \cap (B \cap C), (B \cap C) \cup A, (A \cup B) \cap C$.
- 28.** Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x + 1 \mid 50\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x + 2 \mid 28\}$. Determinați elementele mulțimilor $A, B, A \cup B, A \cap B, A - B$ și $B - A$.
- 29.** Se dau mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x - 1 \mid 42\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x - 1 \mid 27\}$. Determinați mulțimile $A, B, A \cup B, A \cap B, A - B$ și $B - A$.
- 30.** Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x + 1 \mid 18\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x + 2 \mid 21\}$. Determinați mulțimile $A, B, A \cup B, A \cap B, A - B$ și $B - A$.
- 31.** Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 19 \text{ și } 4 \mid x + 6\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10 \text{ și } 6 \mid x + 10\}$. Determinați elementele mulțimilor $A, B, A \cap B, A \cup B, A - B$ și $B - A$.
- 32.** Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x + 1 \mid 35\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$. Determinați mulțimile $A \cup B, A \cap B, A - B$ și $B - A$.
- 33.** Se dau mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x + 2 \mid 56\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 8\}$. Determinați mulțimile $A, B, A \cup B, A \cap B, A - B$ și $B - A$.
- 34.** Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 3 \mid 36\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x - 3 \mid 42\}$. Calculați $A \cup B, A \cap B, A - B$ și $B - A$.
- 35.** Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 2x + 1 \mid 5x + 13\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x - 1 \mid 15\}$. Calculați $A \cup B$ și $A \cap B$.
- 36.** Fie mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \mid \overline{5x7x}\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 9 \mid \overline{2x7x}\}$. Calculați $A \cup B$ și $A \cap B$.
- 37.** Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq 2x + 3 \leq 13\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < 2(2x + 4) - 17 \leq 33\}$.
- Determinați mulțimile A și B .
 - Calculați $A \cup B, A \cap B, A - B$ și $B - A$.
 - Aflați $\text{card}(A \cup B) - \text{card}(A \cap B)$.

- 38.** Se dau mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 15 \leq 3(2x + 3) + 12 + 3(x - 3) - 6 < 78\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 28 < 5(3x + 2) + 4 + 3(2x - 3) + 2 \leq 175\}$.
- Determinați mulțimile A și B .
 - Calculați $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ și $B - A$.
 - Aflați $\text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cup B)$.
- 39.** Se consideră mulțimile $A = \{u(2^6), u(3^{17}), u(9^{20}), u(8^{24}), u(5^{60}), u(4^{21})\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid (x + 1) \mid 28\}$.
- Determinați mulțimile A și B .
 - Arătați că $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.
- 40.** Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2^a, \text{ unde } a \in \{0, 1, 2, 3\}\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este ultima cifră a numerelor } 3^{2008}, 5^{2008}, 4^{2008}, 2^{2009}, 8^{2009}\}$.
- Determinați mulțimile A și B .
 - Arătați că $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.
- 41.** Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^x < 35\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este ultima cifră a lui } 3^n, n \in \mathbb{N}\}$ și $C = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x + 1 \mid 12\}$. Calculați mulțimile $B - C$, $A - (B \cap C)$, $A \cap B \cap C$, $(A - B) \cup (C - B)$.
- 42.** Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 9\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 7\}$ și $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2k + 1, x \leq 11\}$. Aflați mulțimile A , B , C , $(A \cap B) \cup C$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $(B \cap C) - A$ și $(A - B) \cup (B - C)$.
- 43.** Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 10, x - \text{număr par}\}$, $B = \{y \in \mathbb{N} \mid y = 2x + 1, x \in A\}$ și $C = \{z \in \mathbb{N} \mid z = y - x, y \in B \text{ și } x \in A\}$. Calculați mulțimile $(C - B) \cup A$ și $(B \cap C) \cup A$.
- 44.** Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x < 9\}$ și $C = \{y \in \mathbb{N} \mid y = a + b, a \in A \text{ și } b \in B\}$. Arătați că $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
- 45.** Determinați elementele mulțimilor $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 4 \cdot 10^{n+1} + 10^n + 28 \leq 25653\}$ și $B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 9^{n+1} \leq 3^{15} - 2 \cdot 9^7 - 2 \cdot 3^{13} - 2 \cdot 9^6\}$. Calculați $A \cap B$.
- 46.** Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 5^x + 5^{x+2} + 5^{x+3} \leq 3775\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x + 3x + 5x + 7x + \dots + 2013x \leq 2x + 4x + 6x + \dots + 2012x + 2014\}$. Calculați $A \cap B$.
- 47.** Dacă mulțimile A și B îndeplinesc simultan condițiile:
- $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
 - $A \cap B = \{3, 4, 5, 6\}$;
 - $A - B = \{0, 1, 2\}$.
- determinați mulțimile A și B .
- 48.** Determinați mulțimile A și B care îndeplinesc simultan condițiile:
- $A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$;
 - $A \cap B = \{5, 7, 11\}$;
 - $B - A = \{1, 13\}$.

49. Determinați mulțimile A și B care îndeplinesc simultan condițiile:

i) $A \cup B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x < 10\}$;

ii) $A \cap B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x = 2n \text{ și } x \leq 6\}$;

iii) $A - B = \{1, 9\}$.

50. Determinați mulțimile A și B care îndeplinesc simultan condițiile:

i) $A \cup B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x + 1 \leq 12\}$;

ii) $A \cap B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2n + 1, n \leq 5, n \in \mathbb{N}\}$;

iii) $A - B = \{4, 6\}$.

51. Determinați mulțimile A , B și C care îndeplinesc simultan condițiile:

i) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

ii) $A - B = \{3, 4\}$;

iii) $A - C = \{2, 4\}$;

iv) $B - C = \{1, 2\}$.

52. Se consideră mulțimile $A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, x, 6\}$ și $C = \{x, y, 4, 8\}$. Determinați numerele x și y , știind că sunt îndeplinite condițiile $A \cap B = \{2, 5\}$ și $A \subset C$.

53. Se consideră mulțimile $A = \{2, 3, 6\}$, $B = \{2, 4, x, 6\}$ și $C = \{3, 1, 6, x, y\}$. Determinați numerele x și y , știind că sunt îndeplinite simultan condițiile $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 7\}$ și $B \cap C = \{2, 6, 7\}$.

54. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = a^2 - a, a \in \mathbb{N}^*\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N} \mid y = 2b - 1, b \in \mathbb{N}^*\}$.

a) Determinați primele 6 elemente ale mulțimilor A și B .

b) Demonstrați că mulțimile A și B sunt disjuncte.

55. Într-o clasă cu profil matematică – informatică sunt 32 de elevi, dintre care 21 elevi participă la cercul de informatică și 18 elevi participă la cercul de matematică. Fiecare elev participă la cel puțin una dintre aceste activități. Calculați câți elevi participă la ambele activități.

56. Într-o clasă cu profil matematică – informatică sunt 32 de elevi, dintre care 6 elevi au situația neîncheiată la matematică și la informatică, iar 14 elevi au medii maxime la matematică și 16 elevi au medii maxime la informatică.

a) Câți elevi au medii maxime la ambele materii?

b) Câți elevi au medie maximă doar la matematică?

c) Câți elevi au medie maximă doar la informatică?

II.1. CEL MAI MARE DIVIZOR COMUN. CEL MAI MIC MULTIPLU COMUN

1. Fie numărul $a = 2^{n+2} \cdot 5^{n+3} + 2^{n+1} \cdot 5^{n+4}$.
 - a) Scrieți descompunerea numărului în produs de puteri de factori primi.
 - b) Arătați că $70 \mid a$.
2. Fie numerele $A = 2^{n+2} \cdot 5^{n+3} + 3$ și $B = 2^n \cdot 5^{n+2} + 3$. Calculați suma cifrelor numerelor A , B , $A + B$ și $A - B$.
3. Arătați că $10 \mid A$ în fiecare dintre cazurile:
 - a) $A = 18^{12} - 12^{16}$;
 - b) $A = 37^{33} + 33^{37}$;
 - c) $A = 32^{46} + 46^{32}$.
4. Arătați că:
 - a) $3 \mid A$, unde $A = 23 \cdot 10^n + 1$;
 - b) $9 \mid A$, unde $A = 43 \cdot 10^n + 2$;
 - c) $45 \mid A$, unde $A = 10^{n+1} + 35$;
 - d) $6 \mid A$, unde $A = 10^{n+2} + 2$.
5. Determinați cifrele x și y în fiecare dintre cazurile:
 - a) $2 \mid \overline{35x}$;
 - b) $3 \mid \overline{15x}$;
 - c) $5 \mid \overline{43x}$;
 - d) $9 \mid \overline{42x}$;
 - e) $6 \mid \overline{2xy}$;
 - f) $15 \mid \overline{x32y}$;
 - g) $45 \mid \overline{1x7y}$;
 - h) $18 \mid \overline{4x3y}$.
6. Arătați că $14 \mid A$ în fiecare dintre cazurile:
 - a) $A = 2^{23} + 2^{24} + 2^{25}$;
 - b) $A = 3^{59} + 3^{60} + 2 \cdot 3^{58}$;
 - c) $A = 1 + 2 + 3 + \dots + 55$;
 - d) $A = 202 + 404 + 606 + \dots + 1212$.
7. Fie $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2019}$.
 - a) Arătați că $13 \mid A$.
 - b) Arătați că $10 \mid A + 1$.
8. Fie $A = 2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{48}$. Arătați că:
 - a) $5 \mid A$;
 - b) $21 \mid A$.
9. Fie $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2019}$.
 - a) Arătați că $7 \mid A$.
 - b) Calculați câtul și restul împărțirii lui A la 15.
10. Fie numărul $A = 4 \cdot 18^{n+1} - 3 \cdot 2^{n+2} \cdot 9^{n+1} + 4 \cdot 3^{n+2} \cdot 6^{n+2}$. Arătați că $10 \mid A$, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$.
11. Fie numărul $A = 5^n \cdot 4^{n+3} + 5^{n+1} \cdot 4^{n+2} + 5^{n+3} \cdot 4^n - 5^{n+2} \cdot 4^{n+1}$. Arătați că $13 \mid A$, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$.
12. Arătați că $23 \mid A$ pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$, unde $A = 5^{2n+2} \cdot 2^{2n+1} + 25^n \cdot 2^{2n+3} + 5^{2n+1} \cdot 4^{n+2}$.
13. Fie numărul $A = 2^{2n+1} \cdot 3^{2n+3} + 4^{n+1} \cdot 3^{2n+1} + 2^{2n} \cdot 9^{n+2}$. Arătați că $21 \mid A$, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$.
14. Arătați că $53 \mid A$, unde $A = 2^{n+1} \cdot 3^n \cdot 5^n + 7 \cdot 3^{n+2} \cdot 10^n + 2^{n+2} \cdot 15^{n+1} - 9 \cdot 2^{n+3} \cdot 15^n$, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$.
15. Arătați că $105 \mid A$ pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$, unde $A = 7 \cdot 5^n \cdot 6^n + 17 \cdot 2^{n+1} \cdot 15^n - 5^{n+2} \cdot 6^n + 13 \cdot 2^{n+1} \cdot 15^n$.

16. Fie numărul $A = 2 \cdot 3^{2n+4} \cdot 7^n - 63^{n+1} - 3^{2n+1} \cdot 7^{n+2} + 4 \cdot 9^n \cdot 7^{n+2}$. Arătați că $37 \mid A$, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$.

17. Fie numărul $A = 3^{n+1} \cdot 2^{2n} \cdot 24 + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+2} + 2^{n+3} \cdot 6^n - 3^{n+1} \cdot 4^{n+2}$. Arătați că $17 \mid A$, pentru oricare $n \in \mathbb{N}$.

18. Arătați că $19 \mid A$, pentru oricare $n \in \mathbb{N}$, unde $A = 2^n \cdot 15^n + 2^{n+2} \cdot 3^{n+1} \cdot 5^n + 2 \cdot 3^{n+1} \cdot 10^n$.

19. Arătați că $17 \mid a$, pentru oricare $n \in \mathbb{N}$, unde $a = 6^n \cdot 5^n + 2^{n+1} \cdot 7 \cdot 15^n + 2^{n+1} \cdot 15^n$.

20. Scrieți numărul 510 ca o sumă de puteri ale numărului 2.

21. Determinați perechile de numere (x, y) care satisfac relația $x^2(y + 4) = 288$.

*Dacă un număr natural descompus în produs de puteri de factori primi este $n = p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot \dots \cdot p_n^{x_n}$, atunci numărul de divizori ai lui n este egal cu produsul $(x_1 + 1) \cdot (x_2 + 1) \cdot \dots \cdot (x_n + 1)$.

22. Se consideră numerele prime 3 și 5 și numerele compuse 12 și 14. Stabiliți:

- | | |
|--|---|
| a) câți divizori are numărul 3^{12} ; | b) câți divizori are numărul 5^{14} ; |
| c) câți divizori are numărul $3 \cdot 5^{12}$; | d) câți divizori are numărul $3^{14} \cdot 5$; |
| e) câți divizori are numărul $3^{12} \cdot 5^{14}$. | |

23. Determinați cifra x , știind că:

- | | | |
|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| a) $(\overline{15x}; 2) = 1$; | b) $(\overline{15x}; 3) = 1$; | c) $(\overline{15x}; 5) = 1$; |
| d) $(\overline{15x}; 9) = 1$; | e) $(\overline{15x}; 4) = 1$. | |

24. Arătați că numerele a și b sunt prime între ele, în fiecare dintre cazurile următoare:

- | | |
|------------------------------------|-----------------------------------|
| a) $a = 3n + 7$ și $b = 5n + 12$; | b) $a = 3n + 8$ și $b = 2n + 5$; |
| c) $a = 3n + 4$ și $b = 5n + 7$; | d) $a = 7n + 4$ și $b = 9n + 5$; |
| e) $a = 3n + 7$ și $b = 4n + 9$; | f) $a = 2n + 3$ și $b = 3n + 4$. |

25. Arătați că următoarele fracții sunt ireductibile:

- | | | |
|----------------------------|---------------------------|---------------------------|
| a) $\frac{3n+8}{2n+5}$; | b) $\frac{6n+7}{7n+8}$; | c) $\frac{3n+7}{4n+9}$; |
| d) $\frac{6n+13}{7n+15}$; | e) $\frac{4n+9}{5n+11}$; | f) $\frac{7n+10}{2n+3}$. |

26. Arătați că $(a; b) = 1$, în fiecare dintre cazurile următoare:

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $a = 5n + 9$ și $b = 9n + 16$; | b) $a = 4n + 3$ și $b = 6n + 5$; |
| c) $a = 6n + 7$ și $b = 8n + 9$; | d) $a = 8n + 9$ și $b = 12n + 13$; |

27. Determinați valorile naturale ale lui x , pentru care:

- | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| a) $x + 1 \mid x + 7$; | b) $x + 2 \mid 2x + 16$; | c) $x - 1 \mid 3x + 11$; |
| d) $2x + 1 \mid 4x + 11$; | e) $2x - 1 \mid 6x + 12$; | f) $2x + 3 \mid 5x + 15$. |

28. Determinați valorile întregi ale lui x , pentru care:

- | | | |
|----------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| a) $x - 1 \mid x + 5$; | b) $x - 2 \mid 3x + 8$; | c) $x + 1 \mid 4x + 13$; |
| d) $2x - 1 \mid 4x - 15$; | e) $2x + 1 \mid 16x + 18$; | f) $2x + 3 \mid 7x + 15$. |

29. Determinați valorile naturale ale lui x , pentru care:

a) $\frac{18}{x-2} \in \mathbb{Z};$

b) $\frac{21}{2x+1} \in \mathbb{Z};$

c) $\frac{12}{x-3} \in \mathbb{Z};$

d) $\frac{15}{2x-1} \in \mathbb{Z};$

e) $\frac{6}{x-2} \in \mathbb{Z};$

f) $\frac{9}{x-5} \in \mathbb{Z}.$

30. Determinați valorile întregi ale lui n , pentru care:

a) $\frac{n+8}{n+2} \in \mathbb{Z};$

b) $\frac{3n-7}{n+1} \in \mathbb{Z};$

c) $\frac{7n+11}{2n+1} \in \mathbb{Z};$

d) $\frac{7n+26}{2n+1} \in \mathbb{N};$

e) $\frac{5n+8}{2n-1} \in \mathbb{N};$

f) $\frac{5n+13}{2n+1} \in \mathbb{N};$

g) $\frac{7n+10}{2n-1} \in \mathbb{Z};$

h) $\frac{4n+2}{3n-2} \in \mathbb{Z};$

i) $\frac{3n+9}{2n+1} \in \mathbb{Z}.$

31. Se consideră mulțimile $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{4x+13}{3x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$ și $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{9x+29}{2x+5} \in \mathbb{Z}\right\}$. Determinați mulțimile $A, B, A \cup B, A \cap B, A - B$ și $B - A$.

32. Determinați mulțimile $A, B, A \cup B, A \cap B, A - B$ și $B - A$, în fiecare dintre cazurile:

a) $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{3x+18}{2x+5} \in \mathbb{Z}\right\}$ și $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{5x+12}{2x+3} \in \mathbb{Z}\right\};$

b) $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{5x+21}{2x+3} \in \mathbb{Z}\right\}$ și $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{3x+12}{2x+1} \in \mathbb{Z}\right\};$

c) $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{5x+13}{2x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$ și $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{3x+14}{2x+1} \in \mathbb{Z}\right\}.$

33. Se consideră numerele naturale x, y, z care verifică relația $2x - 10y - 11z = 0$. Arătați că $22 \mid z(2x + y)$.

34. Se consideră numerele naturale x, y, z care verifică relația $4x - 10y - 13z = 0$. Arătați că $26 \mid z(4x + 3y)$.

35. Dacă $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ și $4a + 2b - 7c = 0$, arătați că $14 \mid c(2a + b)$.

36. Dacă $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ și $7a - 11b = 84c$, arătați că $77 \mid b(a - c)$.

37. Determinați numerele naturale nenule a și b , știind că:

a) $(a; b) = 15$ și $a \cdot b = 4725$;

b) $(a; b) = 12$ și $a \cdot b = 2160$;

c) $(a; b) = 14$ și $a \cdot b = 4116$, apoi calculați $a + b$;

d) $(a; b) = 15$ și $a \cdot b = 2700$, apoi calculați $\max(a + b)$;

e) $(a; b) = 48$ și $a \cdot b = 34560$, apoi calculați $\min(a + b)$;

f) $(a; b) = 18$ și $a \cdot b = 19440$ ($a < b$).

38. Folosind relația $(a; b) \cdot [a; b] = a \cdot b$, determinați numerele naturale nenule a și b , știind că:

a) $(a; b) = 15$ și $[a; b] = 315$;

b) $(a; b) = 21$ și $[a; b] = 315$;